Numerik – Praktikum

Ingenieurinformatik Teil 2, Sommersemester 2026

David Straub

Termin 5: Differentialgleichungen

Thema: Numerische Lösung von DGLn mit `ode45`

Lernziele: - Ein physikalisches System als DGL in Standardform aufstellen - `ode45` in MATLAB aufrufen und Ergebnisse interpretieren - Verschiedene Szenarien durch Änderung der rechten Seite $f(t, z)$ untersuchen

Aufgabe: Bremsanlage eines Mountainbikes

Szenario

Ein Mountainbiker fährt eine lange Abfahrt hinunter.

- Konstante Hangneigung: $\alpha = 10°$
- Er bremst mit der Scheibenbremse, um die Geschwindigkeit zu kontrollieren
- Die Bremsscheibe erwärmt sich durch Reibung
- Kühlung durch den Fahrtwind – je schneller, desto besser

Frage: Wann überhitzt die Bremse – bei konstantem Bremsen oder bei intervallartiger Bremsung?

Physikalisches Modell: Bewegungsgleichung

Newton entlang der Hangrichtung (x = zurückgelegte Strecke):

$$m\,\ddot{x} = mg\sin\alpha - F_{\mathrm{Brems}} - c_w\,\dot{x}^2$$

Größe	Bedeutung	Wert
m	Masse Fahrer + Rad	90 kg
α	Hangneigung	10°
c_w	Luftwiderstandskoeffizient	0,5 kg/m
F_{Brems}	Bremskraft	variabel

Physikalisches Modell: Wärmebilanz

Wärme in der Bremsscheibe (T = Scheibentemperatur):

$$C_{\mathrm{th}}\,\dot{T} = \underbrace{F_{\mathrm{Brems}} \cdot \dot{x}}_{\text{Reibungsleistung}} - \underbrace{(\lambda_0 + \lambda_1\,\dot{x})\,(T - T_\infty)}_{\text{Kühlung durch Fahrtwind}}$$

Größe	Bedeutung	Wert
C_{th}	Wärmekapazität Bremsscheibe	150 J/K

Größe	Bedeutung	Wert
λ_0	Grundkühlung (Stillstand)	$2\,\mathrm{W/K}$
λ_1	Fahrtwindkühlung	$0{,}5\,\mathrm{W\,s/(K\,m)}$
T_∞	Umgebungstemperatur	$20\,°\mathrm{C}$
$T_{\max}$	Grenztemperatur Bremsscheibe	$300\,°\mathrm{C}$

Aufgabe 1 – Standardform

Schreiben Sie das Gleichungssystem in die Standardform

$$\dot{z} = f(t,\, z), \qquad z(t_0) = z_0$$

a) Welche Größen enthält der Zustandsvektor z? Wie viele Komponenten hat er? *Hinweis: Die Bewegungsgleichung ist 2. Ordnung.*

b) Geben Sie $f(t, z)$ explizit an. Drücken Sie alles durch die Komponenten von z aus.

c) Geben Sie den Anfangszustandsvektor z_0 an. Der Fahrer startet aus dem Stillstand bei Umgebungstemperatur.

Aufgabe 2 – Konstantes Bremsen

Bremskraft: $F_{\text{Brems}} = 150\,\mathrm{N}$ (konstant)

a) Lösen Sie das System mit `ode45` für $t \in [0,\, 120\,\mathrm{s}]$.

b) Plotten Sie $\dot{x}(t)$ und $T(t)$ in zwei Subplots. Zeichnen Sie $T_{\max}$ als horizontale Linie ein.

c) Welche Gleichgewichtsgeschwindigkeit stellt sich ein? Überprüfen Sie das Ergebnis rechnerisch: Was gilt im eingeschwungenen Zustand für $\ddot{x}$?

Aufgabe 3 – Intervallartiges Bremsen

Nun bremst der Fahrer abwechselnd: 10 Sekunden bremsen, 10 Sekunden frei. Die mittlere Bremskraft soll dieselbe sein wie in Aufgabe 2.

a) Wie groß muss F_{Brems} während der Bremsintervalle sein?

b) Passen Sie $f(t, z)$ an – F_{Brems} wird jetzt zeitabhängig.

c) Lösen Sie erneut mit `ode45` und stellen Sie beide $T(t)$-Kurven in einem gemeinsamen Plot dar.

d) Wann überhitzt die Bremse schneller – und warum?